

$$\left[ u(\tau_k, s - (t - \tau_k)f_{q_k} - u(t, s)) \right] \cdot (t - \tau_k)^{-1} \leq -\langle p, f_* \rangle - H^*(\tau_k, s) + O(t - \tau_k).$$

Отметим, что в рассматриваемом случае  $p \in X_0(t, s)$ . Поэтому  $H(t, p, s) \leq H^*(t, s)$ . Переходя к пределу при  $k \rightarrow \infty$ , получаем требуемое неравенство (2.7).

<sup>1</sup> См., напр.: *Овсеевич А. И.* Экстремальные свойства эллипсоидов, аппроксимирующих области достижимости // Проблемы управления и теории информации. 1983. Т.12, № 1.

<sup>2</sup> См.: *Панасюк А. И.* Уравнения областей достижимости и их применение в задачах оптимального управления // Автоматика и телемеханика. 1982. № 5; *Он же.* Уравнение множеств достижимости // Сибир. матем. журн. 1984. Т. 25, № 4.

<sup>3</sup> См.: *Овсеевич А. И.* Экстремальные свойства эллипсоидов, аппроксимирующих области достижимости.

<sup>4</sup> См., напр.: *Субботин А. И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. Москва; Ижевск, 2003.

<sup>5</sup> См.: *Crandall M., Ishii H., Lions P.-L.* User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations // Bull. Amer. Math. Soc. 1992. Vol. 27, № 1.

<sup>6</sup> Доказательство приведено: *Субботин А. И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка.

## ИЗ ВОСПОМИНАНИЙ ОБ АНДРЕЕ ИЗМАЙЛОВИЧЕ СУББОТИНЕ\*

Ю. С. Осипов, президент Российской академии наук

С Андреем Субботиным связано, может быть, лучшее время моей жизни. Я очень тесно соприкасался с ним, начиная с его студенческих лет, нас объединяла работа, дружба. Я называл его по имени, он меня – по имени и отчеству.

Не стану повторять слова о большом таланте, исключительной математической одаренности Андрея Измайловича – это хорошо известно. Хочу сказать о его великом мужестве. Я ведь помню его танцующим на своей свадьбе, веселым, полным сил. Он явно не собирался болеть. Только человек выдающихся достоинств и ума мог так преодолевать жизненные невзгоды – в полноценной, повседневной, трудной, но, конечно, интересной работе. В доме Субботиных происходило множество разнообразных событий. Регулярно проводились интереснейшие семинары, бывали практически все выдающиеся математики, приезжавшие в Екатеринбург. Об этом, наверняка, заботился Н. Н. Красовский, внимательно следивший за настроением Андрея, за тем, чтобы тот не чувствовал себя в стороне от важных дел. Именно он порой инициировал появление у Субботиных новых интересных людей, затевал часто ненаучные разговоры, зная, что

\* Наука Урала. 2000. № 3.

даже если физически Андрею это и тяжело, то моральный выигрыш от таких встреч гораздо важнее. Андрей многих из нас объединял. У него были студенты, аспиранты, он вел большую переписку, полностью руководил отделом, и это был настоящий, живой отдел.

Разумеется, без Нины Николаевны такое вряд ли было бы возможно. Именно она несла на себе основную тяжесть работы по дому, организовывала встречи гостей. Делала настолько много, что перед ней можно только преклоняться. Во время наших, к сожалению, нечастых в последние годы встреч (каждый раз, бывая в Екатеринбурге, я старался заезжать к Андрею, периодически звонил по телефону) на вопросы о помощи Субботины неизменно отвечали, что все в порядке, все хорошо, ничего не нужно.

Андрей Субботин оставил яркий след в науке, яркий след в памяти своих товарищей.

**А. Б. Куржанский, академик,  
заведующий кафедрой системного анализа МГУ**

Впервые я услышал об Андрее Субботине от Э. Г. Альбрехта, показавшего мне работу третьекурсника. Она поразила ясностью мышления, простотой доказательства...

– Показать ли ее Н. Н. Красовскому? – спросил Альбрехт.

– Обязательно, – ответил я.

Вскоре Андрей стал «своим» человеком на кафедре прикладной математики Уральского университета, возглавляемой Николаем Николаевичем, – задолго до окончания учебы. К этому времени я знал уже многое о его жизни, о студенческой группе, в которой он выделялся своим дарованием, был ее гордостью.

Летом 1966 года, по окончании четвертого курса, Андрей уже съездил в Палангу, на летнюю школу по теории игр (мы ездили вместе). На ней была секция по дифференциальным играм – тематика его занятий с Н. Н. Красовским. Тем же летом в Москве состоялся Всемирный конгресс математиков. На нем с докладом по дифференциальным играм выступили Л. С. Понтрягин и американец Р. Айзекс. Тематика только зарождалась, а ныне Айзекс, Красовский, Понтрягин считаются ее основателями. Так что Андрей попал «в струю», в самый раз. Четкое логическое мышление сразу выдвинуло его в любимые соавторы учителя.

В 1967 году мы с А. И. Субботиным и Ю. С. Осиповым перешли на работу в Академию наук (Свердловское отделение Математического института имени В. А. Стеклова). В 1969 году А. И. Субботин уже докладывал на большой международной конференции в Тбилиси свои совместные с Красовским результаты.

1989 год. Приехав в Свердловск из Австрии, где я тогда работал, зашел, как всегда, к Субботиным. Андрей стал рассказывать о своих последних размышлениях, вылившихся в построение неклассических решений уравнений Гамильтона – Якоби. Эти уравнения лежат в основе решения многих нестандартных задач теории управления. Рассказывал долго, тихим, ровным голосом. Картина вырисовывалась интересная – широкая и внушительная. Стало ясно, что переброшены мосты между разными подходами. Что сформулировано то, что останется надолго.

В 1995 году в США вышла монография, подытожившая многие работы Андрея Измайловича в этой области.

Последняя встреча произошла в мае 1997 года. Были с женой у Субботиных. Андрей был болен, но засиделись долго. Говорили о прошлом и будущем, о великом и среднем, о детях и внуках...

**А. Г. Ченцов, член-корреспондент РАН,  
заведующий отделом управляемых систем ИММ УрО РАН**

Из встреч с А. И. Субботиным вспоминаются чаще те, которые происходили в узком кругу, иногда один на один. Разговор касался разных тем, временами далеких от Андрея Измайловича. Было заметно, что он в курсе жизни Института. Он вспоминал о своей работе в прошедшие годы; порой с присущим ему чувством юмора рассказывал о случаях, вызывающих улыбку, стремился поддержать хорошее настроение.

Наши разговоры неизменно возвращались к работе. Будучи склонным к построениям конструктивным, Андрей Измайлович с полным вниманием относился к рассуждениям коллег, использующих противоречия. Иногда возникали два варианта рассуждений. Случалось и так, что за один промежуток времени Андрей Измайлович Субботин предпочитал одну схему исследований, а позднее обращался к другой, находя новое в уже сделанной, казалось бы, работе. Тем самым он видел результат с разных сторон и находил неожиданное продолжение. При изложении результатов он детально исследовал состояние вопроса, работы других математиков, стремился воспроизвести «фон», на котором возникли его конструкции.

Большой совместной работой стала для нас с Андреем Измайловичем монография «Оптимизация гарантии в задачах управления». Ее предложил написать Н. Н. Красовский. В ней хотелось отразить новые подходы к решению задач управления, формализуемых в виде дифференциальных игр. В этот период Андрей Измайлович преодолел ряд серьезных трудностей, связанных с негладкостью цены дифференциальных игр, когда неприменимо классическое дифференциальное исчисление. Его занимал вопрос: а какой же тогда может быть функция цены? Он получил исчерпывающий ответ и изложил его в книге во взаимосвязи новой теории и представлений, сложившихся ранее на основе замечательной теоремы об альтернативе, установленной Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным. В этой же связи следует отметить глубокий и весьма неожиданный результат А. И. Субботина и Н. Н. Субботиной: непрерывные законы управления по принципу обратной связи значительно проигрывают в качестве. Эти факты были существенно дополнены новыми идеями А. И. Субботина в части решения задач управления, которыми он в тот момент занимался. Но в нем уже происходила внутренняя работа, которая позднее материализовалась для задач совсем другой природы: Андрею Измайловичу удалось построить законченную теорию обобщенных решений дифференциальных уравнений Гамильтона – Якоби. Говоря об этих своих результатах с присущей ему скромностью, Андрей Измайлович больше останавливался на работе других математиков, отмечая их вклад. Это касалось и специалистов, которые по каким-либо причинам не смогли его понять; Андрей Измайлович, напротив, стремился к объективной картине происходящего в данном научном направлении. Возвращаясь к монографии, отмечу, что

такую картину он и хотел в ней отразить. У нас не было споров, что включать, а что не включать в книгу. Все сложилось само собой в результате совместных размышлений. Работать с А. И. Субботиным было легко и интересно. Он много трудного брал на себя, никак не показывая это.

Андрей Измайлович реферировал работы иностранных ученых. Они не всегда ссылались на более ранние результаты российских математиков. Со свойственной ему принципиальностью, А. И. Субботин сообщал в зарубежные издательства об истинном положении дел; не раз его вмешательство способствовало восстановлению справедливости. В отношении же своих работ он таких вопросов не поднимал никогда...

У Андрея Измайловича много учеников. Он увлекал идеями молодежь и математиков, имевших немалые собственные результаты. А. И. Субботин оставил им надежные ориентиры. Не случайно премия имени А. И. Субботина присуждена его ученику, молодому математику А. С. Лахтину. Мы многим обязаны А. И. Субботину. С годами это становится яснее. Андрея Измайловича нет с нами. Нам так не хватает его совета, его участия.

**В. Н. Ушаков, доктор физико-математических наук,  
заведующий отделом динамических систем ИММ УрО РАН**

Я познакомился с Андреем Субботиным, будучи студентом третьего курса математико-механического факультета университета, на семинарах и лекциях Н. Н. Красовского... В конце моей студенческой учебы, когда я работал над дипломом, мы стали встречаться чаще. Случалось, что я обращался к Андрею за советом, и он неизменно помогал мне. Он умел мгновенно ухватить суть проблемы, ответить на нетривиальный вопрос, приводя продуманные аргументы.

Нельзя не вспомнить о неоценимой поддержке, которую оказал мне Андрей во время моей службы в армии. Дело в том, что после университета меня распределили в вооруженные силы, в воинскую часть, находившуюся далеко от Свердловска. Не было никаких перспектив заниматься математикой в ближайшие два года. Однако посылки со спецлитературой по математике, которые я регулярно получал от Андрея, помогли мне сохранить хороший математический уровень и остаться профессионалом.

По возвращении в Свердловск мои контакты с Андреем продолжались. Он стал руководить моей научной работой: сформулировал мне несколько задач из теории дифференциальных игр, наметил подходы к их решению и потом постоянно помогал в процессе решения. В середине 70-х годов А. И. Субботин был уже хорошо известен своими научными достижениями. Большую популярность среди специалистов по теории управления приобрела изложенная в ряде статей Н. Н. Красовского и А. И. Субботина оригинальная концепция позиционных дифференциальных игр, основу которой составляет принцип экстремального прицеливания на стабильные мосты. Полагаю, что этому немало способствовала вышедшая в 1974 году в издательстве «Наука» монография Н. Н. Красовского и А. И. Субботина «Позиционные дифференциальные игры». Изложенный в монографии подход предопределил развитие теории дифференциальных игр на многие годы вперед.

К этому времени Андрей приобрел и солидный опыт в руководстве аспирантами и научной молодежью. Отмечу, что научное руководство он осуществлял неформально. Так, например, не было строго оговорено время наших встреч. К Андрею можно было прийти буквально в любой день и получить консультацию. Андрей был эрудированным математиком, поэтому часто консультации на специальную математическую тему переходили в более широкое русло и, как правило, заканчивались за чашкой чая. Не забуду атмосферу тех встреч и бесед, за которые я благодарен Андрею и его жене Нине Николаевне, неизменно присутствующей при них. Мне приятно вспомнить, что во время таких встреч рождались весьма плодотворные идеи применительно к той науке, которой мы с увлечением занимались – теории дифференцированных игр. Так, например, весной 1983 года во время одного из разговоров возникла идея применения инфинитезимальных конических конструкций для описания стабильности. Применение этих конструкций позволило Андрею Измайловичу обосновать эквивалентность введенного им в теории уравнений Гамильтона – Якоби понятия минимаксного решения и введенного примерно в то же время в работах М. Дж. Крэндалла, П.-Л. Лионса и Л. С. Эванса понятия вязкостного решения. Насколько важна тематика минимаксных и вязкостных решений в теории уравнений в частных производных и теории оптимального управления, показывает тот факт, что за работы по вязкостным решениям молодой математик П.-Л. Лионс получил в 1994 году одну из самых престижных в области математики премий – Филдсовскую премию.

В последние годы А. И. Субботин вместе со своими учениками успешно развивал теорию минимаксных решений. Результаты исследований Андрея Измайловича по теории минимаксных решений представлены в его монографиях «Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона – Якоби» (1991) и «Generalized Solutions of First Order PDEs the Dynamical Optimization Perspective» (1995). Эти монографии пользуются большим авторитетом у специалистов.

В заключение хочу сказать, что Андрей был не только выдающимся ученым, но и замечательным человеком. Я думаю, это почувствовали все его многочисленные ученики – доктора и кандидаты наук, все, кто с ним соприкасался. Мы, ученики и сотрудники Андрея, будем вспоминать его с благодарностью.

### **Н. Н. Красовский, академик РАН**

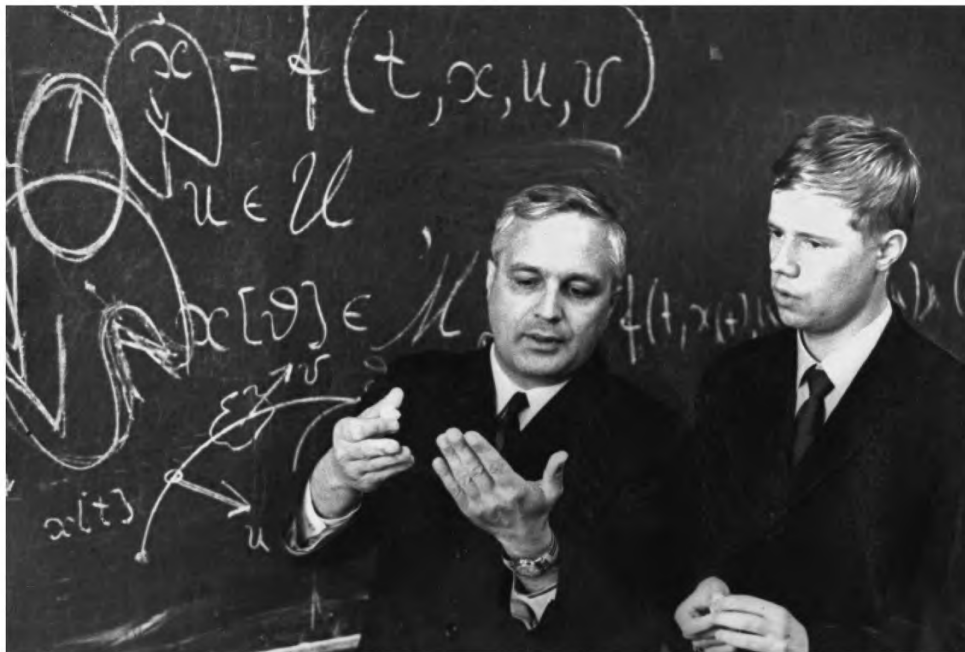
На университетскую кафедру прикладной математики студента третьего курса Субботина привел наш коллега Э. Г. Альбрехт. И с первых дней все мы, кто там работал, почувствовали в нем «своего». При том, что кафедра была сильной, состояла из молодых, но уже успевших далеко продвинуться в своей области сотрудников (А. Б. Куржанский, Ю. С. Осипов, В. Е. Третьяков, Г. С. Шелементьев). Прежде всего Андрей Измайлович произвел впечатление своей очень здоровой и очень прозрачной логикой. Помноженная на редкую работоспособность, интеллектуальную выносливость и волю, она сразу выдавала в нем незаурядного ученого. По сути дела, его университетский диплом был готовой кандидатской диссертацией, хотя формально ученую степень он получил позже. Впрочем, одаренность его поражала не только нас. В 1969 году мы с ним ездили в Мос-

кву, в МГУ, где Субботин сделал доклад о наших совместных исследованиях в позиционных дифференциальных играх на семинаре академика Л. С. Понтрягина. Великий математик был настолько воодушевлен докладом, что проговорил с Андреем больше четырех часов. Конечно, Андрей Измайлович чувствовал доверие к себе и неизменно отвечал на него делом. Он не умел и не любил топтаться на месте, постоянно двигался вперед, всегда следовал принципу «ни дня без строчки». И полученные им результаты, решения сложнейших задач по-настоящему уникальны.

Но не только высочайшие профессиональные качества выделяли Субботина. Было что-то светлое и очень внятное в облике этого человека, во всем, что он говорил, делал. Нет, он не чувствовал себя ангелом или гением, хотя хорошо знал цену своим достижениям, будучи тем самым мастером, которому претит плохо выполненная работа. Так же относился к чужому мастерству. Если что-то казалось ему заслуживающим похвалы, он не скупился на добрые слова, но и отрицательные рецензии давал твердо. Особенно не терпел несправедливости – в оценках ли заслуг, в поступках ли. К своим товарищам, близким всегда относился по-рыцарски. Не забуду его реакции на мое предложение оформлять документы для представления к званию члена-корреспондента Академии. Андрей Измайлович заявил тогда однозначно: «Не буду участвовать в конкурсе, пока член-коррами не станут Куржанский и Осипов. Они – достойней». Вообще поразительно, как ясно и верно он воспринимал и оценивал окружающих, себя самого. Особенно это усилилось после начала болезни, которая внешне его характера не изменила. Перемены коснулись скорее внутреннего мира – он стал еще глубже, сосредоточеннее. Думаю, это было связано с жесткой необходимостью постоянно переосмысливать очередное свое новое состояние – много лет, опять и опять. О себе, своих возможностях он знал абсолютно все и был здесь беспощадно объективен. Ровно за месяц до кончины сказал: «Больше заведовать отделом не могу. Мой ресурс исчерпан...»

Андрей Измайлович очень хорошо понимал роль своей супруги Нины Николаевны, в сущности, совершавшей рядом с ним ежедневный подвиг, решая невероятное количество бытовых проблем и умудряясь полноценно заниматься наукой. Но никогда не говорил об этом, зная, что словами ей не поможет. Всегда кланяюсь ей в душе низко, низко...

Если есть в человеке нравственная сила – она проявляется постоянно, ее никуда не денешь. В Андрее, чем дальше прогрессировала болезнь, она нарастала – до самых последних дней. Если мне жалуются на недуги – тут болит, там колет, – я неизменно вспоминаю его. Двадцать два года провел он в сидячем положении, в последнее время почти не мог шевелить руками, самостоятельно питаться. Мог только одержимо работать. Но когда бы и с чем бы вы не пришли к нему – он как будто только вас и ждал. Мало кто на такое способен...



Академик Н. Н. Красовский (слева) и доктор физико-математических наук А. И. Субботин. С фотографии 1974 г.

**В. Чемезова**

## **ИГРЫ ДЛЯ ИЗБРАННЫХ\***

Екатеринбург. Из окна нашего редакционного кабинета можно было бы при определенных условиях видеть окно-фонарь его квартиры. Там пульсировал бы вечером экран телевизора или горела настольная лампа, освещающая невероятные построения уравнений, без коих немислимы его любимые игры. Но между нашими домами – серая громада университета, который мы когда-то окончили. Альма-матер заслоняет весь тот дом, оставляя лишь внушительных размеров отверстия на верхотуре. Через них наблюдают за миром городские художники, имеющие там мастерские. На крыше «универа» недавно появилась огромная круглая спутниковая антенна межвузовской компьютерной связи. Для математиков города это большое событие. Для сотрудников университета – тоже. При встрече, после обмена формальными любезностями, они сразу спрашивают: «Видали, что у нас на крыше построили?» Андрей Измайлович Субботин – человек, живущий за окном-фонариком, ученый, с которым мне хотелось познакомиться очень давно и которого не щедрый на эпитеты Николай Николаевич Красовский назвал «жемчужиной в короне российской математики», – тоже не забыл упомянуть об антенне. Что увеличило ее диаметр с пятиметрового до размеров космического подряда. По крайней

\* Урал. рабочий. 1994. 22 дек.